

TD n°1: Fonctions analytiques, séries entières

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-4-9-10-11-6-12. Les exercices marqués d'un ¹ sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Séries entières

Exercice 1. Vrai-faux d'échauffement

Vrai ou faux ? Donner une démonstration ou un contre-exemple. On considère $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, et on note $\rho(f)$ le rayon de convergence d'une série entière f .

1. $\rho(f + g) \geq \min(\rho(f), \rho(g))$ et $\rho(fg) \geq \min(\rho(f), \rho(g))$.
2. Si $\rho(f) > \rho(g)$, alors $\rho(f + g) = \rho(g)$.
3. Si $\rho(f) > \rho(g)$, alors $\rho(fg) = \rho(g)$.
4. Si $f \in \mathbb{C}[[z]]$ converge sur le cercle $|z| = r$, alors $\rho(f) \geq r$. Et en remplaçant la conclusion par $\rho(f) > r$?
5. $\rho(f) = \rho(f')$.

Exercice 2. Série harmonique

On définit, pour $n \geq 1$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, et

$$H(z) = \sum_{n \geq 1} H_n z^n.$$

Calculer le rayon de convergence de cette série et démontrer que $H(z) = -\frac{\log(1-z)}{1-z}$ formellement (et donc pour tout z dans le disque de convergence).

Exercice 3. Somme de carrés

Notons $r_2(n)$ le nombre de points à coordonnées entières positives sur le cercle de rayon $\sqrt{n}$, et D_n le nombre de points à coordonnées entières positives dans le disque de rayon $\sqrt{n}$ (par exemple, $r_2(5) = 2$ car $2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 = 5$). Démontrer que

$$\left(\sum_{m \geq 0} z^{m^2} \right)^2 = \sum_{n \geq 0} r_2(n) z^n$$

puis que

$$\frac{1}{1-z} \left(\sum_{m \geq 0} z^{m^2} \right)^2 = \sum_{n \geq 0} D_n z^n.$$

Quels sont les rayons de convergences de ces séries ?

Exercice 4. Un peu de combinatoire

Soit P_n le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en morceaux de cardinal 1 ou 2, on considère $S(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{P_n}{n!} z^n$.

1. Prouver l'égalité de séries entières

$$S'(z) = (1+z)S(z).$$

2. En déduire une expression de $S(z)$.
3. En déduire une formule pour P_n .

¹Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 5. Une expression explicite pour les suites de Lucas

On considère, pour $a, b \in \mathbb{C}$, b non-nul, la suite définie par $L_0 = 0, L_1 = 1$ et $L_{n+1} = aL_n + bL_{n-1}$. On pose $L(z) = \sum_{n \geq 0} L_n z^n$.

1. Montrer que $L(z) = \frac{z}{1-az-bz^2}$.
2. En écrivant $1-az-bz^2 = -b(z-\alpha)(z-\beta)$ et en réalisant une décomposition en éléments simples, en déduire une expression explicite pour L_n . On pensera à différencier les cas $\alpha \neq \beta$ et $\alpha = \beta$.

Exercice 6. Composition de séries entières

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$, $h(z) = \sum_{n \geq 1} c_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. On note $\sum_{n \geq m} C_{m,n} z^n$ la série entière $h(z)^m$. On définit la série entière composée $f(h(z))$ comme :

$$f(h(z)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n a_m C_{m,n} \right) z^n.$$

1. Montrer que $(f+g)(h(z)) = f(h(z)) + g(h(z))$ par calcul direct. Pouvez-vous montrer la même propriété pour le produit ?
On note $f_m(z)$ le polynôme $a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$ et $h_n(z)$ le polynôme $c_1 z + \dots + c_n z^n$
2. Montrer que pour $m, n \geq k$, les termes de degré $\leq k$ du polynôme $f_m(h_n(z))$ ne dépendent pas de $m, n > k$ et sont les mêmes que ceux de la série entière $f(h(z))$.
3. En déduire que la composition est compatible au produit et associative.
4. Vérifier que si f et h ont un rayon de convergence non-nul, alors $f(h(z))$ a un rayon de convergence non-nul, et que $f(h(z))$ est bien le développement en série entière de la fonction $f \circ h$.

Exercice 7. L'anneau $\mathbb{C}[[z]]$

On introduit sur $\mathbb{C}[[z]]$ la valuation ord définie par

$$\text{ord} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \min\{n \geq 0 : a_n \neq 0\}$$

et $\text{ord}(0) = +\infty$.

1. Montrer que $\text{ord}(f) \geq k$ si, et seulement si z^k divise f dans $\mathbb{C}[[z]]$.
2. Vérifier que $\text{ord}(fg) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$.
3. Montrer que $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ est inversible si et seulement si elle vérifie $\text{ord}(f) = 0$. En particulier, tout élément $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ s'écrit uniquement comme $f(z) = z^n g(z)$ avec g inversible et $n = \text{ord}(f)$.
4. Soit $I \subsetneq \mathbb{C}[[z]]$ un idéal. Montrer que $I \subseteq z\mathbb{C}[[z]]$.
5. Montrer qu'en fait il existe m tel que $I = z^m \mathbb{C}[[z]]$. L'anneau $\mathbb{C}[[z]]$ est un anneau principal !
6. Vérifier que les résultats de cet exercice restent valides si l'on remplace $\mathbb{C}[[z]]$ par l'anneau $\mathbb{C}\{z\}$ des séries entières de rayon de convergence > 0 .

Exercice 8. Théorème de Cauchy pour les équations différentielles

On désire démontrer le théorème suivant :

Théorème de Cauchy : Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}[[z]]$. Le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions $y(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ de l'équation différentielle

$$y^{(n)}(z) + a_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + a_0(z)y(z) = 0 \quad (1)$$

est de dimension n , et un isomorphisme explicite avec $\mathbb{C}^n$ est donné par

$$y \mapsto [y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)]^T.$$

De plus, si les a_i ont toutes un rayon de convergence $\geq R$, alors les solutions ont un rayon de convergence $\geq R$.

1. On pose $A(z) \in M_n(\mathbb{C}[[z]])$ la matrice

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(z) & -a_1(z) & \dots & -a_{n-1}(z) \end{bmatrix}.$$

Démontrer que $y \mapsto [y(z), y'(z), \dots, y^{(n)}(z)]^T$ réalise un isomorphisme entre l'espace des solutions de (1) et l'espace des $\mathbf{y}(z) \in \mathbb{C}[[z]]^n$ vérifiant

$$\mathbf{y}'(z) = A(z)\mathbf{y}(z). \quad (2)$$

2. Vérifier que la donnée de n solutions de (2) est équivalente à la donnée d'une matrice $Y(z) \in M_n(\mathbb{C}[[z]])$ vérifiant

$$Y' = AY. \quad (3)$$

3. Soit $Y \in \text{GL}_n(\mathbb{C}[[z]])$ une solution de (3). Vérifier que $X = Y^{-1}$ est solution de l'équation différentielle $X'(z) = -X(z)A(z)$. On pourra penser à vérifier que la règle de Leibniz $(UV)' = U'V + UV'$ s'applique dans le cas de matrices.

4. Démontrer que si $Y_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{C}[[z]])$, $Y_2 \in M_n(\mathbb{C}[[z]])$, la matrice $Y_1^{-1}Y_2$ est une matrice constante. En déduire que si une telle matrice Y_1 existe, l'espace des solutions de (2) est de dimension au plus n sur $\mathbb{C}$.

5. En écrivant $A(z) = \sum_{n \geq 0} A_n z^n$, résoudre (3) avec la condition $Y(0) = \mathbf{1}_n$. Vérifier que la matrice Y obtenue est inversible.

Indication : on pourra vérifier que la série entière $\det(Y(z))$ est inversible

6. En déduire la partie formelle du théorème de Cauchy.

7. Utiliser l'expression explicite trouvée pour les coefficients de Y pour prouver la partie sur les rayons de convergence.

Indication : montrez que si $A(z)$ converge sur le disque de rayon R , alors $Y(z)$ converge sur le disque de rayon r pour tout $r < R$.

Fonctions analytiques

Exercice 9. Opérations sur les fonctions analytiques

Montrer les propriétés suivantes :

- Soit U un ouvert connexe et $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Montrer que le produit $z \mapsto f(z)g(z)$ est analytique.
- Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts et soient $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Montrer que la fonction $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique. En particulier si f est analytique sur un ouvert U et ne s'annule pas, la fonction $1/f$ est analytique (On pourra penser à l'exercice 6).
- Montrer que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, de préférence sans calcul !

Exercice 10. Zéros d'une fonction analytique

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, on considère une fonction analytique f sur U et $K \subseteq U$ un compact. Montrer que f a un nombre fini de zéros dans K .

Exercice 11. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f une fonction analytique sur U qui n'est pas un polynôme. Montrer qu'il existe un point $a \in U$ tel qu'aucun coefficient du développement en série entière de f au voisinage de a n'est nul.

Indication : on pourra montrer que l'ensemble des points où la propriété est vérifiée est un G_δ dense.

Exercice 12. Sommation d'Abel

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres complexes.

1. Montrer la *formule de sommation par partie* : pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) B_k = (A_n B_n - A_0 B_0) - \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} (B_{k+1} - B_k).$$

2. Supposons que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ soit telle que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^n a_i)_{n \geq 0}$ soit bornée et que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ soit formée de nombres réels strictement positifs, décroissante, tendant vers 0. Montrer que la série $\sum_n a_n B_n$ converge.
3. Supposons que $(a_n)_{n \geq 0}$ soit une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0 telle que la série de terme général a_n soit divergente. Montrer que la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence 1 et est convergente en tout point de $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sauf en $z = 1$.

Exercice 13. Lemme de la partie réelle

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence $+\infty$. Pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$, notons $M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$ et $A(r) = \sup_{|z| \leq r} |\Re(f(z))|$. Le but de l'exercice est de montrer le lemme suivant :

Lemme de la partie réelle : Pour tous $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$, tels que $R > r$, on a

$$M(r) \leq \frac{R+r}{R-r} |f(0)| + \frac{2r}{R-r} A(R).$$

1. Montrer que pour tous $n \geq 1$ on a

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \Re(f(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta.$$

2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $r > 0$ on a

$$|a_n| \leq \frac{2A(r)}{r^n}.$$

En déduire que pour tous $R > r > 0$, $M(r) \leq \frac{2rA(R)}{R-r}$.

3. Conclure.

Exercice 14. Convergence au bord $\mathfrak{A}$

Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons

$$E(f) = \{z \in \mathbb{T} \mid f(z) \text{ converge}\}$$

le sous-ensemble du cercle unité où la série converge.

1. Montrer qu'on peut avoir $E(f) = \mathbb{T}$, $E(f) = \emptyset$, ou $E(f) = \mathbb{T} \setminus \{z_0\}$ où $z_0 \in \mathbb{T}$. Donner dans chaque cas un exemple de séries entières satisfaisant cette propriété puis donner un exemple qui ne correspond à aucun des trois cas.
2. On va construire un exemple, dû à Luzin, de série entière vérifiant $\lim_n a_n = 0$ et telle que $E(f) = \emptyset$. Soit $m > 0$ un entier et posons

$$\Phi_m(z) := 1 + z + \dots + z^{m-1}.$$

- (a) Soit $z_0 \in \mathbb{T}$, montrer que

$$\max_{0 \leq k \leq m-1} |\Phi_m(z_0 e^{\frac{2i\pi k}{m}})| \geq \frac{2m}{\pi}.$$

- (b) Posons

$$H_m(z) = \Phi_m(z) + z^m \Phi_m(z e^{\frac{-2i\pi}{m}}) + \dots + z^{(m-1)m} \Phi_m(z e^{\frac{-2i\pi(m-1)}{m}}),$$

et

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} z^{1^2 + \dots + (m-1)^2} H_m(z).$$

Montrer que f satisfait aux conditions voulues.

Indication : on pourra montrer que pour z_0 fixé, la série numérique est grossièrement divergente.